Aniello Murano

Definizione Induttiva di Domini

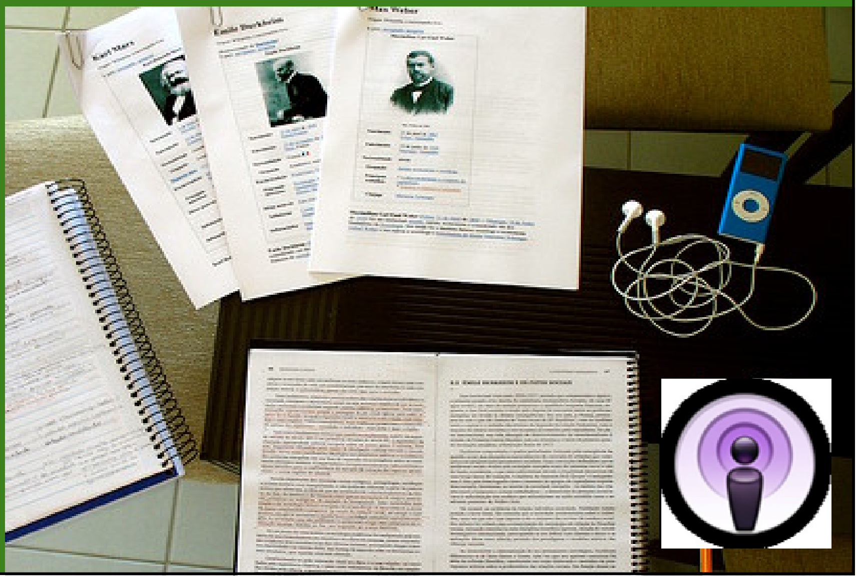
Lezione n.5
Parole chiave:
Domini

Corso di Laurea:
Informatica

Codice:

Email Docente:
murano@ na.infn.it

A.A. 2008-2009



Riassunto delle lezioni precedenti

- Prima Lezione: Introduzione e motivazioni del corso; Sintassi e semantica di ARITHM
- Seconda lezione: Sintassi e semantica operazionale del linguaggio imperativo IMP
- Terza lezione: Tecniche di prova per induzione:
  - Induzione matematica (ipotesi induttiva su numeri precedenti)
  - Induzione strutturale (ipotesi induttiva su sottotermini)
  - Induzione ben fondata (include i precedenti)
  - Induzione su derivazione (ipotesi induttiva su sottoderivazioni)

Introduzione

- In questa lezione analizzeremo la teoria degli ***insiemi definiti induttivamente***
- Un esempio di tale insieme è il linguaggio IMP definito induttivamente dalle regole sintattiche e semantiche introdotte nelle precedenti lezioni
- Questa teoria permette di provare proprietà degli insiemi in modo efficiente, utilizzando le regole che definiscono l'insieme (***induzione sulle regole***)
- Per esempio, è possibile dimostrare che un insieme definito induttivamente tramite regole è il **minimo insieme chiuso** rispetto alle regole date
- Dunque, l'induzione sulle regole è largamente utilizzata nella costruzione dei linguaggi (come vedremo per IMP) e se applicata alle regole semantiche del linguaggio permette di ragionare sulla sua semantica operazionale.

Definizione induttiva di insiemi

- Nelle lezioni precedenti abbiamo già visto insiemi definiti induttivamente(Aexp, $!_{Com}$, ecc.). Queste definizioni includono regole sintattiche (grammatiche) per la definizione sintattica e regole semantiche per la definizione degli alberi di derivazione.
- Una **definizione induttiva** di un insieme è una collezione di regole che include assiomi e regole di inferenza. Un assioma x indica che x è un elemento dell'insieme per default. Una regola di inferenza $\{x_1,\ldots,x_n/\}/x$ mostra che x è un elemento dell'insieme se $x_1,\ldots x_n$ lo sono
- Per esempio, l'insieme dei numeri naturali N è un insieme definito induttivamente, la cui definizione consiste nelle seguenti due regole

$$\frac{}{0} \qquad\qquad \frac{n}{succ(n)}$$

Principio di induzione sulle regole descrizione informale

- Il principio di induzione sulle regole si basa sulla seguente idea

“se una **proprietà è preservata** nel passaggio **dalle premesse alle conclusioni** di tutte le regole utilizzate in una derivazione allora la proprietà vale anche per la conclusione della derivazione”

- Se questo è vero per tutte le regole, allora la proprietà è **vera per tutti gli elementi** dell’insieme definito dalle regole.

Principio di induzione sulle regole

- Sia R un insieme di regole (insieme di assiomi e regole di inferenza) e I l’insieme delle istanze delle regole di R
- Con I_R indichiamo l’insieme di tutti gli elementi x ottenuti da I per cui esiste una derivazione consistente con R.
- Formalmente $I_R = \{x \mid °_R\, x\}$
- Per esempio, si consideri la seguente regola e una sua istanza

$$\frac{<a_0,\sigma> \;!\; n_0 \qquad <a_1,\sigma> \;!\; n_1}{<a_0 \text{ x } a_1 , \sigma> \;!\; n = n_0 \text{ x } n_1} \qquad \frac{<2,\sigma> \;!\; 3 \qquad <3,\sigma> \;!\; 4}{<2 \text{ x } 3 , \sigma> \;!\; 12 = 3 \text{ x } 4}$$

- $<2 \text{ x } 3 , \sigma> \;!\; 12$ non è un elemento di I_R perché l’istanza è corretta, ma non è derivabile con le regole di R
- **Principio di induzione:** Sia P una proprietà, allora 8x 2 I_R. P(x) sse per tutte le istanze di regole (X/y) in R per le quali X µ I_R

(8x 2 X. P(x))) P(y)

Definizione di insieme (R-)chiuso

- Un insieme Q è R-chiuso rispetto alle istanze delle regole R sse ogni volta che le premesse di una istanza di una regola appartengono a Q allora anche le conclusioni appartengono a Q.
- Formalmente: Q è R-chiuso rispetto alle istanze delle regole R sse per ogni istanza di regola (X/y), si ha che X µ Q) y 2 Q

◆ Rules

$n \in Aexp$

$X \in Aexp$

$$\frac{a_0 \in Aexp \quad a_1 \in Aexp}{a_0 + a_1 \in Aexp}$$

◆ Rule instances (X/y): set of premises/conclusion

$\varnothing/1 \quad \varnothing/2 \quad \varnothing/3 \quad \dots$

$\varnothing/x_1 \quad \varnothing/x_2 \quad \varnothing/x_3 \quad \dots$

$\{1\}/(1+1) \quad \{1, 2\}/(1+2) \quad \{1, 2\}/(2+1) \quad \dots$

$\{1, x_1\}/(1+x_1) \quad \{1, x_1\}/(x_1+1) \quad \{x_1, 2\}/(2+x_1) \quad \dots$

$\{x_1\}/(x_1+x_1) \quad \{x_1, x_2\}/(x_1+x_2) \quad \dots$

$\dots$

Minimo insieme chiuso

- I_R è il minimo insieme chiuso rispetto alle regole di R
  - I_R è chiuso
  - Se Q è un insieme R-chiuso allora I_R µ Q

Dimostrazione

▷ $\mathcal{I}_\mathcal{R}$ è $\mathcal{R}$-chiuso

Sia $(X/y) \in \mathcal{R}$. Se $X \subseteq \mathcal{I}_\mathcal{R}$ allora per definizione di $\mathcal{I}_\mathcal{R}$ tutti gli elementi di X sono derivabili e possiamo costruire con (X/y) una deivazione per y. Quindi y è in $\mathcal{I}_\mathcal{R}$.

▷ $\mathcal{I}_\mathcal{R}$ è il più piccolo: se Q è $\mathcal{R}$-chiuso allora $\mathcal{I}_\mathcal{R} \subseteq Q$.

Sia Q un insieme $\mathcal{R}$-chiuso. Se $y \in \mathcal{I}_\mathcal{R}$ allora deve esistere una derivazione $d \Vdash_\mathcal{R} y$. Dimostriamo, per induzione sulla derivazione d, che se $d \Vdash y$ e $y \in \mathcal{I}_\mathcal{R}$ allora $y \in Q$.

- I casi di base sono immediati perchè Q è $\mathcal{R}$-chiuso.

- Caso induttivo: siano $d_i \Vdash_\mathcal{R} x_i$, $(i = 1, .., n)$ le derivazioni delle premesse di d. Per ipotesi induttiva $x_i \in Q$, $(i = 1, .., n)$ e poichè Q è $\mathcal{R}$-chiuso deve essere $y \in Q$.

Induzione sulle regole

Dalla induzione sulle derivazioni possiamo derivare la seguente induzione sulle regole

$$\frac{\forall (X/y) \in \mathcal{R}.\ (X \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}} \wedge \forall x \in X. P(x)) \implies P(y)}{\forall x \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}.\ P(x)}$$

Prova. Sia $Q = \{x \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}} | P(x)\}$. Per dimostrare che la proprietà P è vera per tutti gli elementi di $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è sufficiente dimostrare che $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \subseteq Q$.

La premessa della regola dice che Q è $\mathcal{R}$-chiuso e, dato che $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è il più piccolo insieme $\mathcal{R}$-chiuso, questo implica proprio $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \subseteq Q$.

- Notiamo che la premessa della regola è necessaria in quanto $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è $\mathcal{R}$-chiuso.

Break time

Punto fisso

Set Construction Operator

- Define an operator based on rule instances
  $R(B) = \{ y \mid \exists X \subseteq B. (X/y) \in R \}$
  – create set of conclusions where all the premises are in B
- Series

$A_0 = \varnothing = R^0(\varnothing)$ empty set

$A_1 = R(A_0) = R^1(\varnothing)$ axioms

$A_2 = R(A_1) = R^2(\varnothing)$ derived from axioms in 1 step

...

$A_n = R(A_{n-1}) = R^n(\varnothing)$

Example

◆Operator

$R(B) = N \cup Loc \cup \{ a_0 + a_1 \mid a_0, a_1 \in B \}$

◆Sets

$A_0 = \varnothing$

$A_1 = R(A_0) = N \cup Loc$

– numbers and locations

$A_2 = R(A_1) = N \cup Loc \cup \{ a_0 + a_1 \mid a_0, a_1 \in A_1 \}$

– numbers, locations and sum of any number or location

…

Explicit Construction

◆Inclusion

$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$

◆Define limit

$A = \cup_{n \in \omega} A_n$

- A is R-closed
- R(A) = A
- A is the least R-closed set

◆Fixed-point of an operator

- $fix(R) = \cup_{n \in \omega} R^n(\varnothing)$

Summary

◆Definitions are equivalent

- R-Closure
- Limit of repeated application of operator R
- Fixed-point of operator R

◆Lets use them...

Inductive Syntax Definition

◆Formal explanation of Aexp, Bexp, and Com

$a \in Aexp ::= n \mid X \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 \times a_1$

$b \in Bexp ::= \mathbf{true} \mid \mathbf{false} \mid a_0 = a_1 \mid a_0 \leq a_1 \mid \neg b \mid b_0 \wedge b_1 \mid b_0 \vee b_1$

$c \in Com ::= \mathbf{skip} \mid X := a \mid c_0; c_1 \mid \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1 \mid \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c$

◆Interpret grammar as inference rules which generate the set

- Basis for *structural induction*

Inductive Definition of Relations

◆We have already seen one: $\rightsquigarrow$

$\langle n, \sigma \rangle \rightsquigarrow n$ [Const]

$\langle X, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma(X)$ [Loc]

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \text{ [Sum]}$$

where n *is the sum of* n_1 *and* n_2

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 - a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \text{ [Sub]}$$

where n *is the result of substracting* n_2 *from* n_1

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 \times a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \text{ [Prod]}$$

where n *is the product of* n_1 *and* n_2

Inductive Semantics of While

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow false}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma} \qquad \frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow true \quad \langle c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma' \quad \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \sigma''}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma''}$$

◆Convert rules to operator $R_{\rightsquigarrow}$

$R_{\rightsquigarrow}(S) = \{ \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma, \sigma \rangle \mid \langle b, \sigma, false \rangle \in \rightsquigarrow_{Bexp} \}$

$\cup \{ \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma, \sigma'' \rangle \mid$

$\langle b, \sigma, true \rangle \in \rightsquigarrow_{Bexp}$

$\& \langle c, \sigma, \sigma' \rangle \in S$

$\& \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma', \sigma'' \rangle \in S \}$

$\cup$ *...other rules for Com...*

Fixed-Point of $R_{\rightsquigarrow}$

◆Equivalence

$fix(R_{\rightsquigarrow}) = \rightsquigarrow$

◆We showed that evaluation is a *function*

Inductive Function Definitions

◆Variables in an arithmetic expression

$Loc(n) = \varnothing$

$Loc(X) = \{ X \}$

$Loc(a_0 + a_1) = Loc(a_0) \cup Loc(a_1)$

$Loc(a_0 - a_1) = Loc(a_0) \cup Loc(a_1)$

$Loc(a_0 \times a_1) = Loc(a_0) \cup Loc(a_1)$

◆We are used to seeing programs of this form

- But normally a "definition" gives a convenient name to something that is previously known
- But here the "thing being defined" is used in the definition
- In what sense is this a definition?

Inductive Function Definitions

- Let Loc be the smallest binary relation closed under the following rules

$(n, \varnothing) \in \mathrm{Loc}$

$(X, \{ X \}) \in \mathrm{Loc}$

$$\frac{(a_0, s_0) \in \mathrm{Loc} \quad (a_1, s_1) \in \mathrm{Loc}}{\begin{array}{c}(a_0 + a_1, s_0 \cup s_1) \in \mathrm{Loc}\\ (a_0 - a_1, s_0 \cup s_1) \in \mathrm{Loc}\\ (a_0 \times a_1, s_0 \cup s_1) \in \mathrm{Loc}\end{array}}$$

- Loc is a relation. Is it a function?

Inductive Function Definitions

- Variables in an arithmetic expression

$\mathrm{BadLoc}(\, n\,) = \varnothing$
$\mathrm{BadLoc}(\, X\,) = \{ X \}$
$\mathrm{BadLoc}(\, a_0 + a_1\,) = \mathrm{BadLoc}(a_0) \cup \mathrm{BadLoc}(a_1)$
$\mathrm{BadLoc}(\, a_0 - a_1\,) = \mathrm{BadLoc}(a_0) \cup \mathrm{BadLoc}(a_1)$
$\mathrm{BadLoc}(\, a_0 \times a_1\,) = \mathrm{BadLoc}(a_0 \times (a_1 \times 1)\,)$

- Why is this a problem?
  - How do you tell well-formed inductive definitions from ill-formed ones

Bad Rule

$$\frac{(\, a_0 \times (a_1 \times 1),\, s\,) \in \mathrm{BadLoc}}{(\, a_0 \times a_1,\, s\,) \in \mathrm{BadLoc}}$$

- Closure?
  - The set $\{ (3\times(2\times1), \varnothing), (3\times2, \varnothing) \}$ is R-closed
  - But so is $\{ (5\times(3\times1), \varnothing), (5\times3, \varnothing) \}$
  - The least set is degenerate
- Operator?

$R(B) = \{ (\, a_0\times a_1,\, s\,) \mid (\, a_0\times(a_1\times 1),\, s\,) \in B \}$

  - If this is the only rule for $\times$, then no terms involving $\times$ will be included in $R^n(\varnothing)$ for any n